Zodsai Math I เฉลยข้อสอบ PAT1

โดยอาจารย์ อนุวัฒน์ พัฒนชีวกุลบุตร

ข้อที่ 5 ให้ R แทนเซตของจำนวนจริง และให้ $f : R \to R$ เป็นฟังก์ชันที่มีคุณสมบัติว่า สำหรับทุกจำนวนจริง x โดย $x \neq -1$

$$f\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = x$$

ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

1. $f(f(x)) = -x$ สำหรับทุกจำนวนจริง x
2. $f(-x) = f\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ สำหรับทุกจำนวนจริง x
3. $f\left(\frac{1}{x}\right) = f(x)$ สำหรับทุกจำนวนจริง $x \neq 0$
4. $f(-2-x) = -2 - f(x)$ สำหรับทุกจำนวนจริง x

วิธีที่ 1 จาก $f\left(\frac{1-x}{1+x}\right) = x$ - ①

ให้ $A = \frac{1-x}{1+x}$

$A(1+x) = 1-x$

$A + Ax = 1-x$

$x + Ax = 1-A$

$(1+A)x = 1-A$

$x = \frac{1-A}{1+A}$

↳ แทน ①

$\therefore f(A) = \boxed{\frac{1-A}{1+A}}$, $A \neq -1$

หรือ $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$, $x \neq -1$

$f(\square) = \frac{1-\square}{1+\square}$ ⇒ ②

ข้อ 1. ถ้า เพราะ!

$$f(f(x)) = \frac{1-f(x)}{1+f(x)} \quad \text{จาก (2)}$$

$$= \frac{1-\left[\frac{1-x}{1+x}\right]}{1+\left[\frac{1-x}{1+x}\right]} = \frac{\left[\frac{1+x-1+x}{1+x}\right]}{\left[\frac{1+x+1-x}{1+x}\right]}$$

$$= \frac{\left[\frac{2x}{1+x}\right]}{\left[\frac{2}{1+x}\right]} = \left(\frac{2x}{1+x}\right)\left(\frac{1+x}{2}\right)$$

$$= x \quad \#$$

ข้อ 2. ถูก เพราะ

$$f(-x) = \frac{1-(-x)}{1+(-x)}$$ จาก (2)

หา $f(-x) = \frac{1+x}{1-x}$ — **

แต่ $f\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \frac{1-\left[\frac{1+x}{1-x}\right]}{1+\left[\frac{1+x}{1-x}\right]} = \frac{\left(\frac{1-x-1-x}{1-x}\right)}{\left(\frac{1-x+1+x}{1-x}\right)}$

$\therefore f\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \frac{\left[\frac{-2x}{1-x}\right]}{\left[\frac{2}{1-x}\right]} = \left(\frac{-2x}{1-x}\right)\left(\frac{1-x}{2}\right) = -x$ *

ข้อ 3 จงหาค่า

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}} = \frac{\left(\frac{x-1}{x}\right)}{\left(\frac{x+1}{x}\right)}$$

$$\therefore f\left(\frac{1}{x}\right) = \left(\frac{x-1}{x}\right)\left(\frac{x}{x+1}\right)$$

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{x-1}{x+1} \quad *$$

$$f(x) = \frac{1-x}{1+x} \quad *$$

แต่] ไม่เท่ากันนะ

ข้อ 4 ถูกต้อง

$f(-2-x) = -2 - f(x)$ เท่ากันนะ

เพราะ: $f(-2-x) = -2 - \frac{1-x}{1+x}$

$= \frac{-2-2x-1+x}{1+x}$

$\therefore f(-2-x) = \frac{-x-3}{1+x} - *$

ดังนั้น $f(-2-x) = \dfrac{1-[-2-x]}{1+[-2-x]}$

$f(-2-x) = \dfrac{3+x}{-1-x} = \dfrac{x+3}{-(x+1)}$

$f(-2-x) = \dfrac{-x-3}{1+x}$ *

$\therefore f(-2-x) = -2-f(x)$ *

ตอบข้อ 4

ข้อที่ 7 ค่าของ

$\cot(\text{arccot}\,7 + \text{arccot}\,13 + \text{arccot}\,21 + \text{arccot}\,31)$

เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{11}{4}$ 2. $\frac{13}{4}$ 3. $\frac{9}{2}$ 4. $\frac{25}{2}$

วิธีทำ

จาก $\cot(\text{arccot}\,7 + \text{arccot}\,13 + \text{arccot}\,21 + \text{arccot}\,31)$

กำหนดให้ $A = \text{arccot}\,7$; $B = \text{arccot}\,13$

$C = \text{arccot}\,21$; $D = \text{arccot}\,31$

$\therefore \cot[A+B+C+D]$

$\cot[(A+B)+(C+D)]$

$$= \frac{\cot(A+B)\cdot\cot(C+D)-1}{\cot(A+B)+\cot(C+D)}$$

$$= \frac{\left(\frac{9}{2}\right)\left(\frac{25}{2}\right)-1}{\frac{9}{2}+\frac{25}{2}} = \frac{\left(\frac{221}{4}\right)}{\left(\frac{34}{2}\right)} = \frac{221}{4}\times\frac{1}{34}$$

$$= \frac{13}{4} \text{ * mod } \sqrt{0}\ 2$$

จาก $\cot(A+B)$

$$= \frac{\cot A\cot B-1}{\cot A+\cot B}$$

$$= \frac{7(13)-1}{7+13} = \frac{90}{20} = \frac{9}{2}$$

$A = \operatorname{arccot} 7$

$\therefore \cot A = 7$ ***

$B = \operatorname{arccot} 13$

$\therefore \cot B = 13$ ***

จาก $\cot(C+D)$

$$\frac{\cot C\cot D - 1}{\cot C + \cot D}$$

$$\therefore \frac{21(31)-1}{21+31}$$

$$= \frac{650}{52} = \frac{25}{2}$$ //

$C = \operatorname{arccot} 21$

$\cot C = 21$

$D = \operatorname{arccot} 31$

$\cot D = 31$

ข้อ 8. ให้เส้นตรง $x-y+2=0$ ตัดกับวงกลม $x^2+y^2+6x-4y+4=0$ ที่จุด A และจุด B ถ้า (a,b) เป็นจุดกึ่งกลางของเส้นตรง $y=x$ เป็นแกนสมมาตรของพาราโบลาและพาราโบลาผ่านจุด A และจุด B แล้ว $a+b$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\frac{11}{4}$ 2. $\frac{9}{4}$ 3. $\frac{7}{4}$ 4. $\frac{5}{4}$

วิธีทำ รูปทรงกลม $x^2+y^2+6x-4y+4=0$

ตัดกับเส้นตรง $x-y+2=0$

ที่จุดตัดได้เป็น A และ B

จาก $x-y+2=0$ ดังนั้น $y=x+2$ แทนค่า

รูปทรงกลมจะได้ $x^2+(x+2)^2+6x-4(x+2)+4=0$

$x^2+x^2+4x+4+6x-4x-8+4=0$

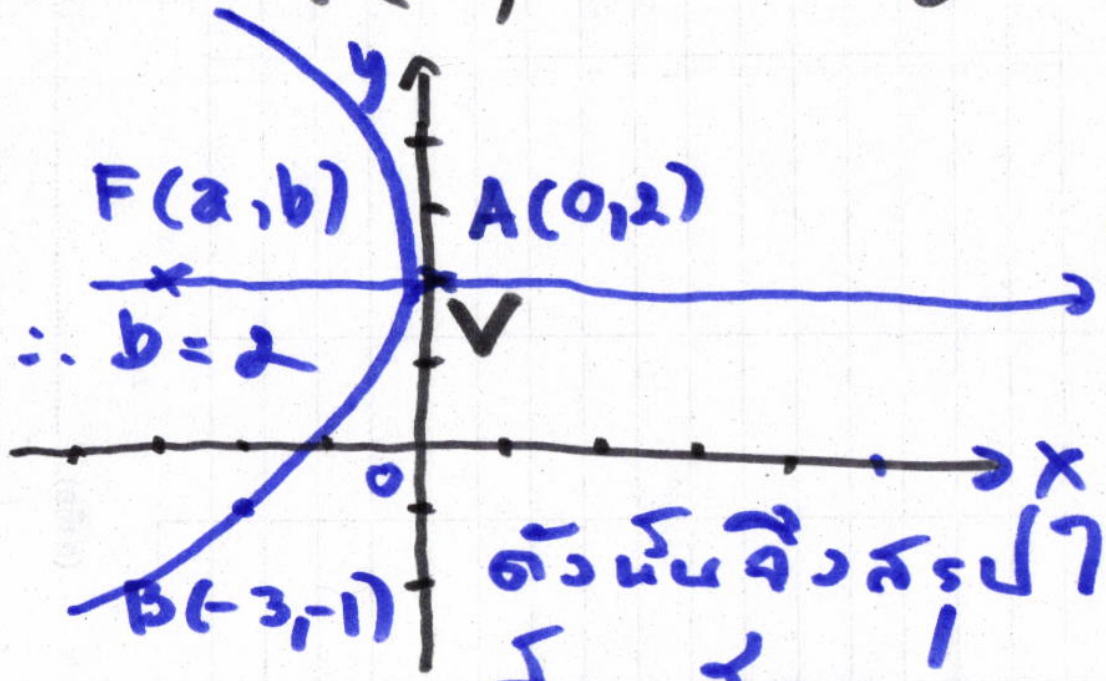
$2x^2+6x=0 \Rightarrow x^2+3x=0$

$x(x+3)=0$

$\therefore x=-3,0$ แทนค่า x ในรูปทรงกลม จะได้ $x=-3, y=-1$

$x=0, y=2$

ดังนั้น A(0, 2) และ B = (-3, -1)



ดังนั้นจึงสรุปได้ว่า พาราโบลา นี้จะมีจุดยอดที่จุด A(0, 2) นั่นเอง เพราะ พาราโบลา จะผ่านแกนของสมมาตรที่จุดยอดนั่นเอง นา

ดังนั้น พาราโบลานี้ มีโฟกัส (F) คือ (a, 2) และมีจุดยอดคือ (0, 2) สร้างเป็นรูปกราฟ

รูปสมการพาราโบลาคือ $(y-k)^2 = -4c(x-h)$

$\therefore$ สมการที่คือ $(y-2)^2 = -4c(x-0)$

$$(y-2)^2 = -4cx$$

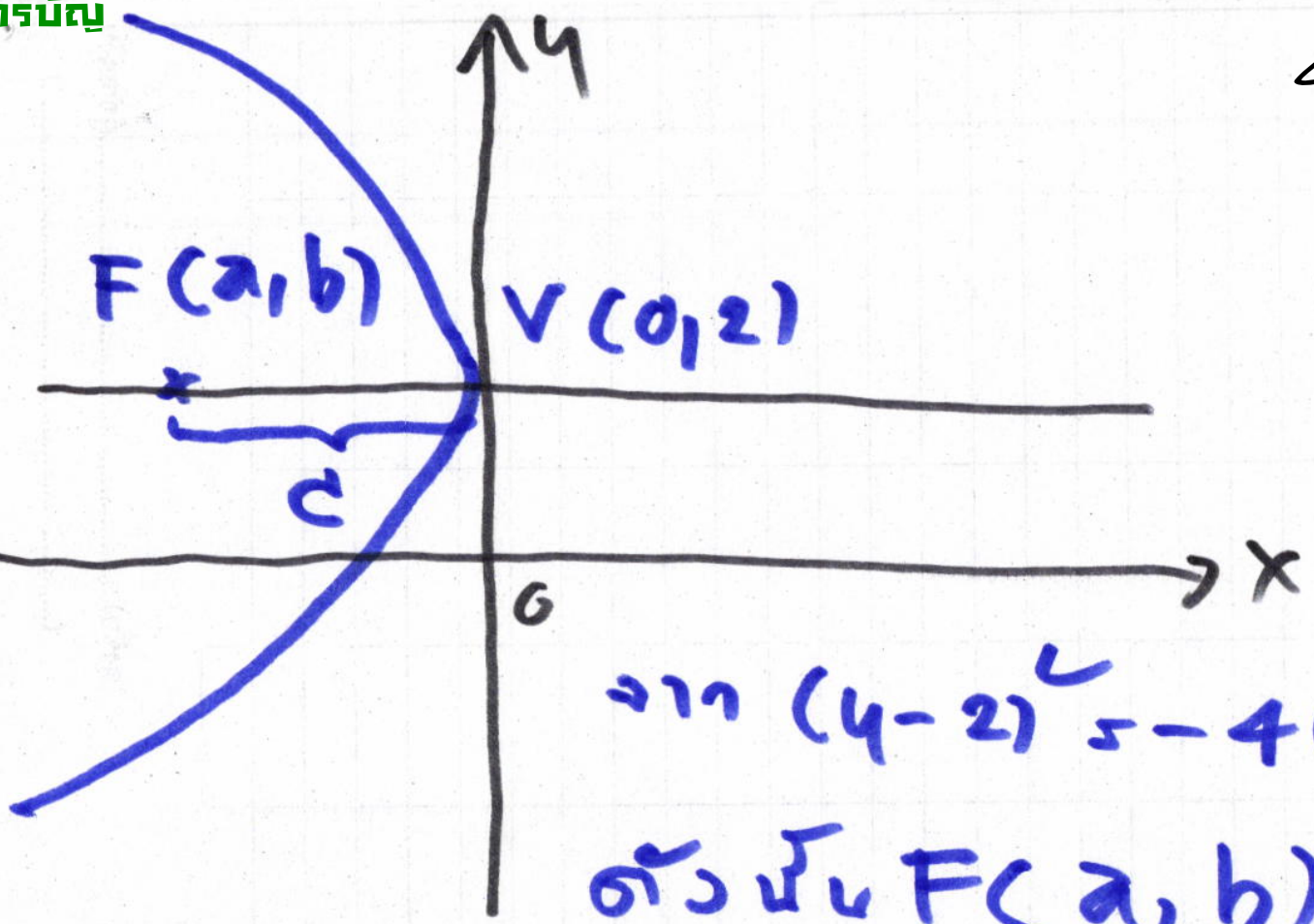
แทน $B(-3,-1)$ ผ่านสมการพาราโบลาที่แทนค่า

ทำ c จะได้ $(-1-2)^2 = -4c(-3)$

$$9 = 12c$$

$$\therefore c = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$$

$\therefore$ สมการคือ $(y-2)^2 = -4\left(\frac{3}{4}\right)x$



จาก $(y-2)^2 = -4\left(\frac{3}{4}\right)x$

ดังนั้น $F(a,b) = F\left(-\frac{3}{4}, 2\right)$

ดังนั้น $a = -\frac{3}{4}$

$b = 2$

$\therefore a+b = \frac{5}{4}$ * ตอบ ข้อ 4

ข้อที่ 9 พิจารณาข้อความต่อไปนี้

(ก.) ให้เพื่อนโจทย์ว่า $4x^2-25y^2+24x-100y-164=0$
มีจุดยอดอยู่ที่จุดกำเนิดของวงรี
$4x^2+25y^2+24x+100y+36=0$ แล้ว
มีแกนสังยุคยาวเท่ากับแกนโทของวงรี

(ข.) วงรี $4x^2+25y^2+24x+100y+36=0$
มีจุดยอดจุดหนึ่งอยู่บนพาราโบลา
$y^2+4y-4x+12=0$

ข้อใดถูกต้อง

1. ก ถูก และ ข. ถูก
2. ก. ถูก และ ข. ผิด

3. ก. ผิดแต่ ข. ถูก   4. ก. ผิดและ ข. ผิด

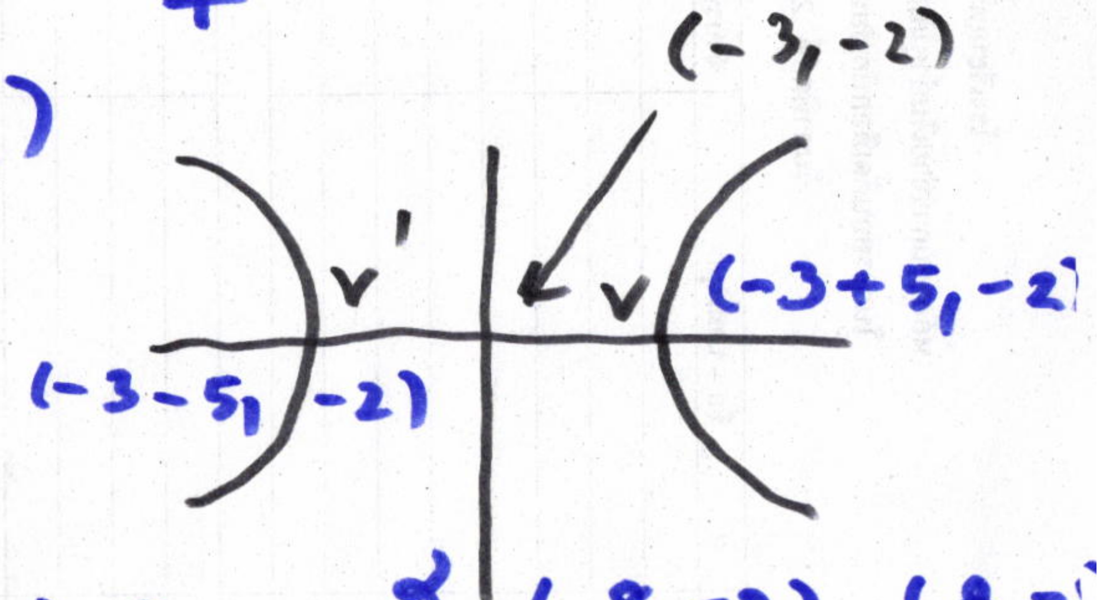
กลับสารบัญ

วิธีทำ

ไฮเพอร์โบลา $4x^2 - 25y^2 + 24x - 100y - 164 = 0$

$$\frac{(x+3)^2}{25} - \frac{(y+2)^2}{4} = 1$$

มีจุดศ.ก. $(-3, -2)$



$a^2 = 25 \Rightarrow a = 5$

$b^2 = 4 \Rightarrow b = 2$

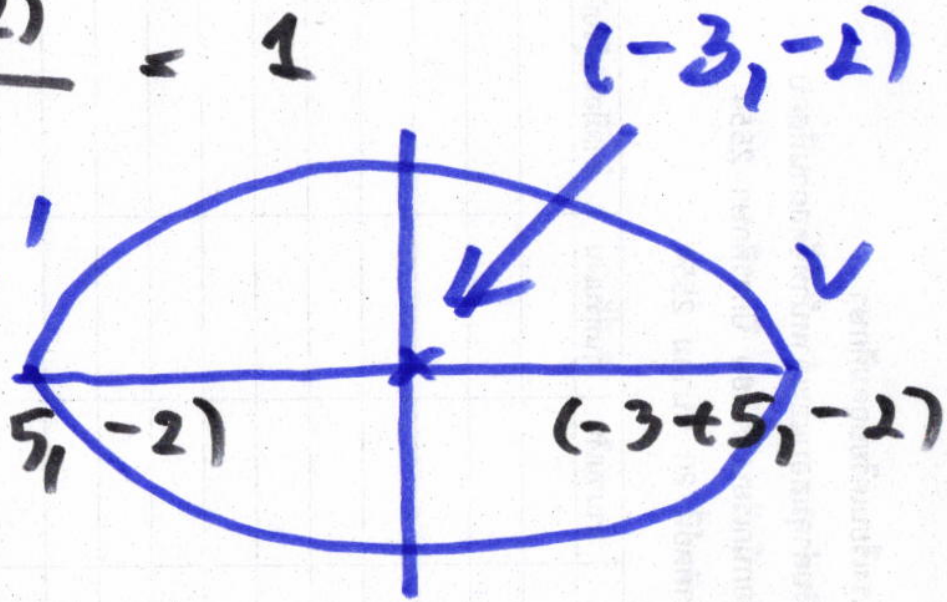
แกนสังยุค $= |2b|$

$= 2(2) = 4$

∴ จุดยอดคือ $(-8, -2)$, $(2, -2)$

วงรี $4x^2+25y^2+24x+100y+36=0$

$$\frac{(x+3)^2}{25}+\frac{(y+2)^2}{4}=1$$



$\therefore$ จุดศูนย์กลาง $(-3,-2)$

$a^2=25 \Rightarrow a=5$

$b^2=4 \Rightarrow b=2$

$\therefore$ จุดยอด $(-8,-2),(2,-2)$

ยาวแกนโท $=|2b|$

$=2(2)=4$

สรุป ข้อ ก. ถูก ✳

พาราโบลา $y^2+4y-4x+12=0$

$(y+2)^2=4(x-2)$

จุดยอดของพาราโบลา คือ $(-8,-2)$ กับ $(2,-2)$

ซึ่งมีจุด $(+2,-2)$ อยู่ 1 จุด อยู่บนพาราโบลา

ที่เพราะว่า $(2,-2)$ ไปแทนในสมการพาราโบลา แล้วทำให้สมการเป็นจริง

$(y+2)^2=4(x-2)$

$(2,-2) \Rightarrow (-2+2)^2=4(2-2)$

$0=0$ สรุป ข้อ ง. ถูก ตาม ข้อ 1.

ข้อ10. ถ้า A แทนเซตคำตอบของ

$2(\log_3 x - 1)^{\frac{1}{2}} + \log_{\frac{1}{3}} x^3 + 4 > 0$ แล้วเซต A

เป็นสับเซตของช่วงในข้อใดต่อไปนี้

1. (0, 3) 2. (1, 4) 3. (2, 5) 4. (2, 9)

วิธีทำ จาก $2(\log_3 x - 1)^{\frac{1}{2}} + \log_{\frac{1}{3}} x^3 + 4 > 0$

จะได้ $2\sqrt{\log_3 x - 1} + \log_{\frac{1}{3}} x^3 + 4 > 0$

$2\sqrt{\log_3 x - 1} + \frac{3}{-1}\log_3 x + 4 > 0$

$2\sqrt{\log_3 x - 1} + \frac{3}{(-1)}\log_3 x + 4 > 0$

ให้ $A = \log_3 x - 1$

$\therefore \log_3 x = A + 1$

$\therefore \quad -\frac{1}{3} < \sqrt{A} < 1$ แต่ $\sqrt{A} \geq 0$ *

$\therefore \quad \sqrt{A} < 1$ ยกกำลังสอง

$A < 1$

$\log_3 x - 1 < 1$

$\log_3 x < 2$

$\therefore \quad x < 3^2$

$x < 9$ - ①

$\log_a \square < \heartsuit$

$\square < a^{\heartsuit}$

เมื่อ $a > 1$

คำตอบที่เพิ่มขึ้นคือ $\log_3 x - 1 > 0$ - ②

กลับสารบัญ

$$2\sqrt{\log_3 x - 1} - 3\log_3 x + 4 > 0$$

$$\therefore 2\sqrt{A} - 3(A+1) + 4 > 0$$

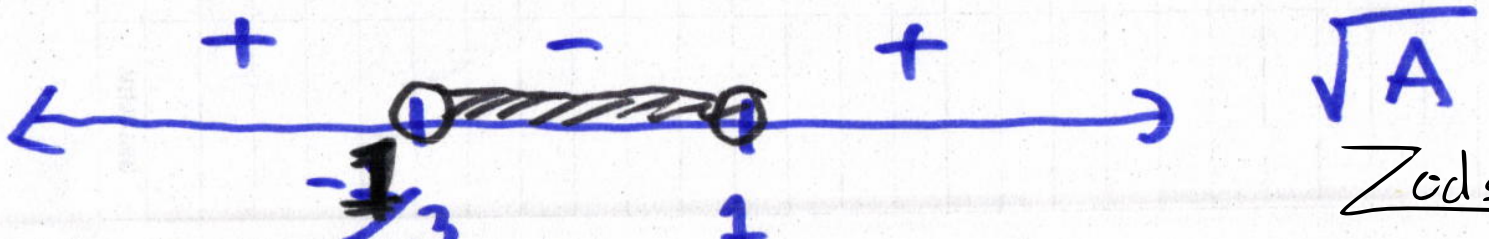
$$2\sqrt{A} - 3A - 3 + 4 > 0$$

$$2\sqrt{A} - 3A + 1 > 0 \quad \text{หาร } (-1) \text{ ตลอด}$$

$$3A - 2\sqrt{A} - 1 < 0$$

$$3(\sqrt{A})^2 - 2\sqrt{A} - 1 < 0$$

$$(3\sqrt{A} + 1)(\sqrt{A} - 1) < 0$$



$\log_3 x > 1$

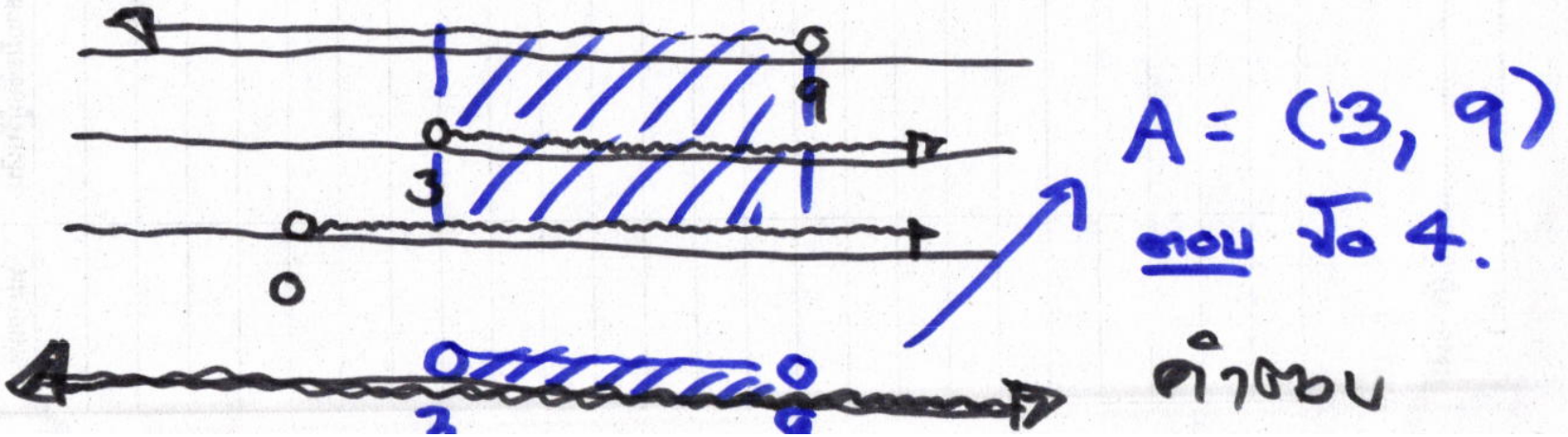
$x > 3^1$

$\therefore x > 3 \quad * -②$

คำตอบที่เพิ่มขึ้นอีก $x > 0$ เพราะเป็นเลขหลังลอก ✓

$\therefore x > 0 \quad *③$

นำคำตอบจาก ① ∩ ② ∩ ③ จะได้



A = (3, 9)

ตอบข้อ 4.

คำตอบ

ข้อที่ 12 กำหนดให้ x เป็นจำนวนเต็ม

และ $A = \begin{bmatrix} 2x & 1 \\ x & x \end{bmatrix}$ เป็นเมตริกซ์ที่มี

$\det A = 3$

ถ้า B เป็นเมตริกซ์ที่มีขนาด 2×2 ใดๆ ที่มี

$BA + BA^{-1} = 2I$ เมื่อ I เป็นเมตริกซ์

เอกลักษณ์การคูณขนาด 2×2 แล้ว ค่า

$\det B$ อยู่ในช่วงใดต่อไปนี้

1. $[1, 2]$
2. $[-1, 0]$
3. $[0, 1]$
4. $[-2, -1]$

วิธีทำ $A = \begin{bmatrix} 2x & 1 \\ x & x \end{bmatrix}$, $\det A = 3$

$\therefore 2x(x) - x = 3$

$2x^2 - x - 3 = 0$

$(2x - 3)(x + 1) = 0$

$\therefore x = \frac{3}{2}, -1$ แต่โจทย์กำหนดให้

x เป็นจำนวนเต็ม

ดังนั้น $x = \frac{3}{2}$ จะไม่ได้

คือได้ $x = -1$ ค่าเดียว

$$\therefore A = \begin{bmatrix} 2x & 1 \\ x & x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{2+1}\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\therefore A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

$\det(A+A^{-1}) =$
$(-\frac{7}{3})(-\frac{5}{3}) + (\frac{2}{3})(\frac{2}{3})$
$= 39/9$ //

$$\therefore A + A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{7}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{5}{3} \end{bmatrix}$$

$\det(A+A^{-1}) = \frac{39}{9}$

จาก $BA + BA^{-1} = 2I$

$$B(A + A^{-1}) = 2I$$

$$\therefore \det[B(A+A^{-1})] = \det(2I)$$

$$\det B \times \det(A+A^{-1}) = 2^2 \det I$$

$$\det B \times \left(\frac{39}{9}\right) = 4(1) \qquad \det I = 1$$

$$\therefore \det B = \frac{4\times 9}{39} = \frac{36}{39} = \frac{12}{13} \ *$$

เพราะ $\frac{12}{13} \in [0,1]$ ตอบ ข้อ 3.

ข้อที่ 13 กำหนดให้ a, b และ z เป็นจำนวนเชิงซ้อนโดยที่ $|a| \neq |b|$, $|a| \neq 1$ และ $|b| \neq 1$ ถ้า $|az+b| = |\bar{b}z+\bar{a}|$ แล้ว $|z|$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 1 2. 2 3. 3 4. 4

วิธีทำ โจทย์ลักษณะนี้ออกข้อสอบ PAT1 ค่อนข้างบ่อยโดยอาศัย สมบัติของประมาณ $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$ หรือ $|a|^2 = a \cdot \bar{a}$

จาก $|az+b| = |\bar{b}z+\bar{a}|$ ยกกำลังสองทั้งสองข้าง

$$|az+b|^2 = |\bar{b}z+\bar{a}|^2$$

$$(az+b)\cdot\overline{(az+b)} = (\bar{b}z+\bar{a})\cdot(\overline{\bar{b}z+\bar{a}})$$

$$(az+b)\cdot(a\bar{z}+\bar{b}) = (\bar{b}z+\bar{a})\cdot(\bar{b}\bar{z}+\bar{a})$$

$$(az+b)\cdot(\bar{a}\cdot\bar{z}+\bar{b}) = (\bar{b}z+\bar{a})\cdot(b\bar{z}+a)$$

$$az\bar{a}\bar{z}+a\bar{b}z+b\bar{a}\bar{z}+b\cdot\bar{b} = \bar{b}zb\bar{z}+\bar{b}za+\bar{a}b\bar{z}+\bar{a}\cdot a$$

$$a\bar{a}\cdot z\bar{z}+a\bar{b}z+b\bar{a}\bar{z}+|b|^2 = b\bar{b}z\bar{z}+a\bar{b}z+b\bar{a}\bar{z}+|a|^2$$

$$|a|^2\cdot|z|^2+|b|^2 = |b|^2\cdot|z|^2+|a|^2$$

$$|a|^2\cdot|z|^2-|b|^2\cdot|z|^2 = |a|^2-|b|^2$$

$$(|a|^2-|b|^2)\cdot|z|^2 \le |a|^2-|b|^2$$

$$\therefore |z|^2 = \frac{|a|^2-|b|^2}{|a|^2-|b|^2} \le 1$$

$|z| \le 1$ หน่วย

ตอบ ข้อ 1

ข้อที่ 14 ถ้า $x-1+i$ เป็นตัวประกอบของพหุนาม $P(x)=x^3+ax^2+4x+b$ เมื่อ a,b เป็นจำนวนจริง แล้วค่าของ a^2+b^2 เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 17 2. 13 3. 8 4. 5

วิธีทำ เพราะว่า $x-1+i$ เป็นตัวประกอบของพหุนาม $P(x)$ หรือ

$\frac{P(x)}{x-1+i}$ เป็นตัวประกอบตัวหนึ่งของ $P(x)$

จาก $\frac{P(x)}{x-c}$ จะมีเศษเป็น $P(c)$

ดังนั้น $\frac{P(x)}{x-1+i}$; $\frac{P(x)}{x-(1-i)}$

แสดงว่า $P(1-i)=0$ นั่นเอง

$\therefore (1-i)^3+a(1-i)^2+4(1-i)+b=0$

แต่ $(1-i)^2=-2i$

ดังนั้น $(1-i)^3+a(1-i)^2+4(1-i)+b=0$

จะได้ $(1-i)^2\cdot(1-i)+(1-i)^2+4(1-i)+b=0$

$(-2i)(1-i)+(-2i)+4(1-i)+b=0$

$-2i+2i^2-2i+4-4i+b=0$

$-2i-2-2i+4-4i+b=0$

$(b+2)+(-8)i=0$

กลับสารบัญ

ดังนั้น $(1-i)^3 + a(1-i)^2 + 4(1-i) + b = 0$

จะได้ $(1-i)(1-i)^2 + a(-2i) + 4 - 4i + b = 0$

$(1-i)(-2i) - 2ai + 4 - 4i + b = 0$

$-2i - 2 - 2ai + 4 - 4i + b = 0$

$(b+2) + (-6-2a)i = 0$

หรือ $(b+2) + (-6-2a)i = 0 + 0i$

สรุปว่า $b+2 = 0$ และ $-6-2a = 0$

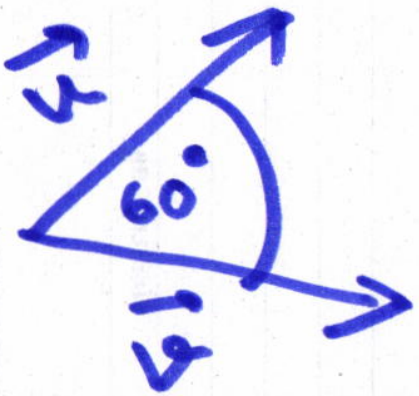
$\therefore b = -2$ และ $a = -3$

ดังนั้น $a^2 + b^2 = (-2)^2 + (-3)^2 = 13$ ตอบ ข้อ 2

ข้อที่ 15 กำหนดให้ $\vec{u}$ และ $\vec{v}$ เป็นเวกเตอร์ใดๆ โดยที่ $|\vec{u}|=1$, $|\vec{v}|=3$ และ $\vec{u}$ ทำมุม 60° กับ $\vec{v}$ ค่าของ $\dfrac{|\vec{u}+\vec{v}|}{|2\vec{u}-\vec{v}|}$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $\sqrt{\frac{13}{19}}$
2. $\sqrt{\frac{13}{7}}$
3. 1
4. $\sqrt{\frac{7}{19}}$

วิธีทำ ให้กำหนด $|\vec{u}| = 1$, $|\vec{v}| = 3$



จาก $|\vec{u}+\vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v} + |\vec{v}|^2$

$\therefore |\vec{u}+\vec{v}|^2 = 1^2 + 2|\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta + 3^2$

$= 10 + 2(1)(3)\cos 60^\circ$

$= 10 + 6\left(\frac{1}{2}\right) = 13$

$\therefore |\vec{u}+\vec{v}| = \sqrt{13}$ — ①

กลับสารบัญ

แล: $|2\vec{u}-\vec{v}|^2 = |2\vec{u}|^2 - 2(2\vec{u}\cdot\vec{v}) + |\vec{v}|^2$

$= 4|\vec{u}|^2 - 4|\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta + |\vec{v}|^2$

$= 4(1)^2 - 4(1)(3)\cos 60^\circ + 3^2$

$|2\vec{u}-\vec{v}|^2 = 4 - 12\left(\frac{1}{2}\right) + 9 = 7$

$\therefore |2\vec{u}-\vec{v}| = \sqrt{7}$ — ②

ดังนั้น $\frac{|\vec{u}+\vec{v}|}{|2\vec{u}-\vec{v}|} = \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{7}} = \sqrt{\frac{13}{7}}$

ตอบ ข้อ 2.

กลับสารบัญ

ข้อ 17 กำหนดให้ 4 พจน์แรกของลำดับเลขคณิต คือ $2a+1$, $2b-1$, $3b-a$ และ $a+3b$ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริง พจน์ที่ 1000 ของลำดับเลขคณิตนี้เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. 3997
2. 3999
3. 4001
4. 4003

วิธีทำ โจทย์กำหนดลำดับเลขคณิต

$2a+1,\ 2b-1,\ 3b-a,\ a+3b$

ดังนั้น $(2b-1)-(2a+1) = 2b-2a-2$ — ①

$(3b-a)-(2b-1) = b-a+1$ — ②

$(a+3b)-(3b-a) = 2a$ — ③

ลำดับเลขคณิตจะมีผลต่างร่วมเท่ากัน

$\therefore\ 2b-2a-2 = b-a+1$

$b-a = 3$ — ④

และ $b-a+1 = 2a$

$b-3a = -1$ — ⑤

นำ ④ - ⑤

จะได้ $-a+3a = 3+1$

$2a = 4$

$a = 2$ → แทนใน ④

$\therefore b = 5$

สรุปลำดับเลขคณิตนี้คือ

$2a+1, 2b-1, 3b-a, a+3b$ คือ

5 , 9 , 13 , 17

ตอบข้อ 3

$\therefore a_1 = 5$ และ $d = 9-5 = 4$

พจน์ที่ 1000 $= a_1 + 999d = 5 + 999(4) =$ 4001

ข้อที่ 19 กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันพหุนาม ซึ่ง $f''(x) = ax + b$ เมื่อ a และ b เป็นจำนวนจริง ถ้า $f(0) = 2$ และกราฟของ f มีจุดต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ $(1, -5)$ แล้ว $2a + 3b$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. -12
2. 20
3. 42
4. 48

วิธีทำ โจทย์กำหนด $f''(x) = ax+b$

$\therefore$ $f'(x) = \frac{ax^2}{2}+bx+c$

และ มีจุดต่ำสุดสัมพัทธ์ที่ $(1,-5)$

หมายความว่า $f(1) = -5$ และ $f'(1) = 0$

และ จากโจทย์ $f(0) = 2$

$\therefore$ $f''(x) = ax+b$ — ①

$f'(x) = \frac{ax^2}{2}+bx+c$ — ②

$f(x) = \frac{ax^3}{6}+\frac{bx^2}{2}+cx+d$ — ③

เพราะ $f(0) = 2$ แทนในสมการ ③

$$\therefore \quad f(0) = \frac{a(0)^3}{6} + \frac{b(0)^2}{2} + c(0) + d$$

$$2 = d \quad *$$

เพราะ $f'(1) = 0$ แทนในสมการ ②

$$f'(1) = \frac{a(1)^2}{2} + b(1) + c$$

$$0 = \frac{a}{2} + b + c \quad - ④$$

เพราะ $f(1) = -5$ แทนในสมการ ③

$$f(1) = \frac{a(1)^3}{6} + \frac{b(1)^2}{2} + c(1) + 2$$

$$-5 = \frac{a}{6} + \frac{b}{2} + c + 2$$

$$\therefore \frac{a}{6} + \frac{b}{2} + c = -7 \quad \text{---} (5)$$

$$\frac{a}{2} + b + c = 0 \quad \text{---} (4)$$

นำ (4) − (5)

$$\frac{a}{3} + \frac{b}{2} = 7$$ นำ 6 คูณตลอด

$$\therefore 2a + 3b = 42$$ ตอบ $\sqrt{}$ 3.

ข้อที่ 10 กำหนดให้ R แทนเซตของจำนวนจริง

ให้ $g: R \to R$ เป็นฟังก์ชันกำหนดโดย

$$g(x) = \frac{1}{4x+3} \quad \text{เมื่อ } x \neq -\frac{3}{4}$$

ถ้า $f: R \to R$ เป็นฟังก์ชันที่

$(fog)(x) = x$ สำหรับทุกจำนวนจริง x

แล้ว $f''(\frac{1}{4})$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1. $-\frac{1}{2}$
2. $\frac{1}{2}$
3. -8
4. 8

วิธีที่ 1 โจทย์กำหนด $g(x) = \frac{1}{2x+3}$

และ $(fog)(x) = x$

$f(g(x)) = x$

$f\left(\frac{1}{2x+3}\right) = x$

ให้ $A = \frac{1}{2x+3}$

$2x+3 = \frac{1}{A}$

$2x = \frac{1}{A} - 3$

$x = \frac{1-3A}{2A}$

$\therefore f(A) = \frac{1-3A}{2A}$

ดังนั้น $f(x) = \frac{1-3x}{2x} = \frac{1}{2x} - \frac{3}{2}$

จาก $f(x) = \frac{1}{2x} - \frac{3}{2}$

$f(x) = \frac{1}{2}x^{-1} - \frac{3}{2}$

$f'(x) = -\frac{1}{2}x^{-2} - 0$

$f''(x) = x^{-3}$

$\therefore f''(x) = \frac{1}{x^3}$

$f''(\frac{1}{2}) = \frac{1}{(\frac{1}{2})^3} = \frac{1}{(\frac{1}{8})} = 8$

ตอบ ข้อ 4.

ข้อที่ 28 กำหนดให้ I แทนเซตของจำนวนเต็ม

และให้ $f(x) = \dfrac{x^4 - 2x^2 + a \cdot x - 75}{x^5 + b^2 \cdot x - 270}$ เมื่อ $a, b \in I$

ถ้า $A = \{(a,b) \in I \times I \mid f(3) = 0\}$ และ

$B = \{(a,b) \in I \times I \mid \sqrt{a^2 - 2ab + b^2} < 3\}$

แล้ว จำนวนสมาชิกของเซต $A \cap B$ เท่ากับเท่าใด

วิธีที่ $f(3) = 0$

จาก $f(x)$ มีตัวประกอบคือ

$\therefore \quad f(3) = \dfrac{3^4 - 2(3)^2 + a^2 \cdot (3) - 75}{3^5 + b^2 \cdot (3) - 270}$

$0 = \dfrac{81 - 18 + 3a^2 - 75}{3^5 + b^2(3) - 270}$

$\therefore \quad \dfrac{3a^2 - 12}{3b^2 - 27} = 0$

$$\frac{a^2-4}{b^2-9} \leq 0$$

$$\frac{(a-2)(a+2)}{(b-3)(b+3)} = 0$$

ดังนั้น $a = -2, 2$ และ $b \neq 3, b \neq -3$

แสดงว่า

$$A = \{(-2,b), (2,b) \mid b \in I, b \neq 3, b \neq -3\}$$

ตัวอย่าง 13

$$\sqrt{a^2-2ab+b^2} < 3$$

$$\sqrt{(a-b)^2} < 3$$

$$|a-b| < 3$$

$$-3 < a-b < 3$$

$$-3-a < -b < 3-a$$

$$3+a > b > a-3$$

นั่นคือ $a-3 < b < a+3$ *

จาก $a-3 < b < a+3$

กรณี $a = -2$

$\therefore -2-3 < b < -2+3$

$-5 < b < 1$ ดังนั้น

$b = -4, -3, -2, -1, 0$

จะได้ $(-2,-4), (-2,-3), (-2,-2), (-2,-1)$,

$(-2,0)$ รวม 5 ตัว แต่ $b \neq -3$

$\therefore (-2,-3)$ ซึ่งไม่เกิดสี, เหลือ 4 ตัว - ①

ตัวอย่าง a = 2

$\therefore \quad 2-3 < b < 2+3$

$-1 < b < 5$ ดังนั้น

$b = 0, 1, 2, 3, 4$

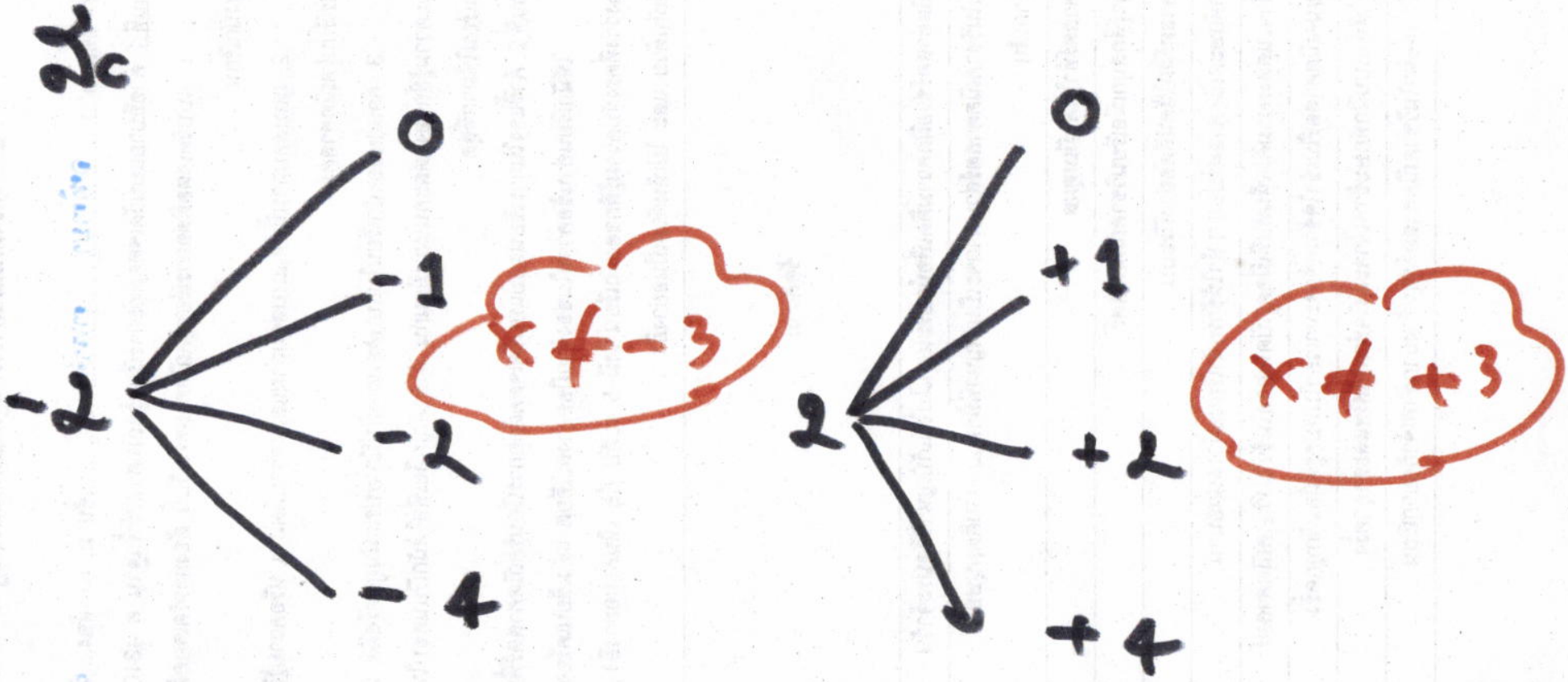
ดังนั้น $(2,0), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4)$

รวม 5 ตัว แต่ $b \neq 3$

$\therefore$ (x,y) ที่ไม่เท่ากัน เหลือ 4 ตัว - ②

จาก ① และ ②

จาก ① และ ② จะได้สมาชิกของ A ∩ B



รวม 8 คู่

ข้อที่ 29 ถ้า R แทนเซตของจำนวนจริง

ถ้า $A=\{x\in R \mid 3^{2x}-34(15^{x-1})+5^{2x}=0\}$

และ $B=\{x\in R \mid \log_5(5^{\frac{1}{x}}+125)=\log_5 6+1+\frac{1}{2x}\}$

แล้วจำนวนสมาชิกของเซต $A\cup B$ เท่ากับเท่าใด

วิธีทำ หาเซตคำตอบของเซต A ก่อน

จาก $3^{2x}-34(15^{x-1})+5^{2x}=0$

$(3^x)^2-34(15^{-1})(15^x)+(5^x)^2=0$

$$(3^x)^2 - \frac{34}{15}(3\times5)^x + (5^x)^2 = 0$$

$$(3^x)^2 - \frac{34}{15}\times3^x\times5^x + (5^x)^2 = 0$$

กำหนดให้ $M = 3^x$ และ $N = 5^x$

$$\therefore M^2 - \frac{34}{15}MN + N^2 = 0$$

$$15M^2 - 34MN + 15N^2 = 0$$

$$(5M - 3N)(3M - 5N) = 0$$

กลับสารบัญ

$\therefore 5M-3N=0$ หาร $\Rightarrow 3M-5N=0$

$\frac{M}{N}=\frac{3}{5}$ $\Rightarrow$ $\frac{M}{N}=\frac{5}{3}$

$\frac{3^x}{5^x}=\frac{3}{5}$ $\Rightarrow$ $\frac{3^x}{5^x}=\frac{5}{3}$

$\left(\frac{3}{5}\right)^x=\left(\frac{3}{5}\right)^1$ $\Rightarrow$ $\left(\frac{3}{5}\right)^x=\left(\frac{3}{5}\right)^{-1}$

$\therefore x=1$ $\Rightarrow$ $x=-1$

$A=\{-1,1\}$ *

ตัวอย่าง B

$$\log_5\left(5^{\frac{1}{x}}+125\right)=\log_5 6+1+\frac{1}{2x}$$

$$\log_5\left(5^{\frac{1}{x}}+125\right)=\log_5 6+\log_5 5+\log_5 5^{\frac{1}{2x}}$$

$$\log_5\left(5^{\frac{1}{x}}+125\right)=\log_5\left(6\times 5\times 5^{\frac{1}{2x}}\right)$$

$$\therefore \quad 5^{\frac{1}{x}}+125=30\cdot 5^{\frac{1}{2x}}$$

$$5^{\frac{1}{x}}-30\cdot 5^{\frac{1}{2x}}+125=0$$

$$\left(5^{\frac{1}{2x}}\right)^2 - 30\left(5^{\frac{1}{2x}}\right) + 125 = 0$$

$$\left(5^{\frac{1}{2x}} - 25\right)\left(5^{\frac{1}{2x}} - 5\right) = 0$$

$\therefore$ $5^{\frac{1}{2x}} - 25 = 0$ $\Longrightarrow$ $5^{\frac{1}{2x}} - 5 = 0$

$5^{\frac{1}{2x}} = 5^2$ $\Longrightarrow$ $5^{\frac{1}{2x}} = 5^1$

$\frac{1}{2x} = 2$ $\Longrightarrow$ $\frac{1}{2x} = 1$

$\therefore x = \frac{1}{4}$ $\Longrightarrow$ $x = \frac{1}{2}$

$\therefore B = \{\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\}$

$A = \{-1, 1\}$

$A \cup B = \{-1, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1\}$

$n(A \cup B) = 4$